9 - $a_1(x,t)u_t + a_2(x,t)u_x = a_3(x,t)u + a_4(x,t)$

$(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$

riscrivo l'equazione come

$$u_t + b(x,t)\,u_x = c(x,t)\,u + d(x,t)$$

con $b(x,t) = \dfrac{a_2(x,t)}{a_1(x,t)}$, $c(x,t) = \dfrac{a_3(x,t)}{a_1(x,t)}$, $d(x,t) = \dfrac{a_4(x,t)}{a_1(x,t)}$

le curve caratteristiche sono soluzioni di

$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x = b(x,t) \\ \dot u = c(x,t)\,u + d(x,t) \end{cases}$$

a) ipotesi sui coefficenti:

- $a_i(x,t) \in C^1(\mathbb{R}\times(0,T))$
- ($a_1(x,t) \neq 0 \quad \forall (x,t)$ in tali punti l'eq. degenere in una ODE - vale cmq $\exists!$)
- se la soluzione iniziale è definita su una curva $\gamma \in C^1(J)$ per la quale valga la rappres. $\gamma(z): x = x(z),\ t = t(z),\ \dot t(z)^2 + \dot x^2(z) \neq 0 \quad z \in J$ abbiamo che deve essere (trasversalità) $\dot t(z)\, a_2(x(z),t(z)) - \dot x(z)\, a_1(x(z),t(z)) \neq 0$ ovvero $\dfrac{a_2(\cdot,\cdot)}{a_1(\cdot,\cdot)} = b(\cdot,\cdot) \neq \dfrac{\dot x(z)}{\dot t(z)}$ -

sotto queste ipotesi il pb di Cauchy è ben posto

b) scrivere lo schema SL-EA

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u^n(x_i - b_i^n \Delta t) - u_i^n}{\Delta t} = c_i^n u_i^n + d_i^n$$

per calcolare l'interpolata $\mathbb{P}_0$ posso usare

$$u^n(x_i - b_i^n \Delta t) = \frac{1}{2}\left(u^n\left(x_i - \left\lfloor \frac{b_i^n \Delta t}{\Delta x} \right\rfloor\right) + u^n\left(x_i - \left\lfloor \frac{b_i^n \Delta t}{\Delta x} \right\rfloor + 1\right)\right)$$

o qualcosa di analogo.

d) stabilità.

prima cosa: cosa succede nel caso omogeneo?
SL incondizionatamente stabile (dimostrarlo)

seconda cosa:

$$|u_i^{n+1}| \leq |u^n(x_i - b_i^n \Delta t)| + \Delta t |c_i^n| |u_i^n| + |d_i^n|$$

$$\|u_i^{n+1}\|_\Delta \leq \|u^n\|_\Delta \left(1 + \Delta t \|c_i^n\|_\Delta\right) + \|d_i^n\|_\Delta$$

dato che si chiede lo studio in norma ∞

$$\|c_i^n\|_\infty = 0 \iff c_i^n \equiv 0 \quad \forall (x,t)$$

$\rightarrow$ ho garantita stabilità solo nel caso omogeneo.

$$v_{j+1}^{n} = v^{n}(x_j) + v_x^{n}(x_j)\Delta x + \frac{v_{xx}^{n}(x_j)}{2}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

$\boxed{\text{ES 5}}$

$$v_{j-1}^{n} = v^{n}(x_j) - v_x(x_j)\Delta x + \frac{v_{xx}^{n}}{2}(x_j)\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

Sviluppi di T. Utilizzati

$$v_j^{n+1} = v^{n}(x_j) + v_t(x_j)\Delta t + \frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$v_j^{n-1} = v^{n}(x_j) - v_t(x_j)\Delta t + \frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$-v_{j-1}^{n+1} = -v^{n}(x_j) + v_x(x_j)\Delta x - \frac{v_{xx}}{2}(x_j)\Delta x^2 - v_t(x_j)\Delta t + v_{xt}(x_j)\Delta t\Delta x - \frac{v_{txx}}{2}(x_j)\Delta t\Delta x^2$$
$$- \frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t^2 + \frac{v_{ttx}}{2}(x_j)\Delta t^2\Delta x - \frac{v_{ttxx}}{4}(x_j)\Delta t^2\Delta x^2 + O(\Delta t^3\Delta x^3)$$

$$v_{j+1}^{n+1} = v^{n}(x_j) + v_x(x_j)\Delta x + \frac{v_{xx}}{2}(x_j)\Delta x^2 + v_t(x_j)\Delta t + v_{xt}(x_j)\Delta t\Delta x + \frac{v_{txx}}{2}(x_j)\Delta t\Delta x^2$$
$$+ \frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t^2 + \frac{v_{ttx}}{2}(x_j)\Delta t^2\Delta x + \frac{v_{ttxx}}{4}(x_j)\Delta t^2\Delta x^2 + O(\Delta t^3\Delta x^3)$$

$$\frac{\cancel{v^{n}(x_j)} + v_t(x_j)\Delta t + \frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t^2 - \cancel{v(x_j)} + O(\Delta t^3)}{\Delta t} + C\,\frac{2v_x(x_j)\Delta x + 2v_{xt}(x_j)\Delta t\Delta x + v_{ttx}(x_j)\Delta t^2\Delta x + 2v_x(x_j)\Delta x + O(\Delta x^3)}{4\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{f(x_j)} + f_t(x_j)\Delta t + \frac{f_{tt}}{2}(x_j)\Delta t^2 + \cancel{f(x_j)} + O(\Delta t^3)}{2}$$

$$\cancel{v_t(x_j)} + \frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t + O(\Delta t^2) + C\left(\cancel{v_x(x_j)} + \frac{v_{xt}(x_j)}{2}\Delta t + \frac{v_{ttx}}{2}(x_j)\Delta t^2 + O(\Delta x^2)\right)$$
$$= \frac{f_t(x_j)\Delta t}{2} + \frac{f_{tt}}{4}(x_j)\Delta t^2 + O(\Delta t^3) + \cancel{f(x_j)}$$

ove $\frac{v_{tt}}{2}(x_j)\Delta t + C\,\frac{v_{xt}}{2}(x_j)\Delta t = \frac{f_t(x_j)\Delta t}{2}$ sotto adeguate ipotesi di regolarità è verificato (molt. per $\frac{2}{\Delta t}$ e derivo risp. t)

Quindi C-N è di ordine 2 in spazio e tempo